10. Übung zur Elementaren Stochastik

Prof. Dr. Ehrhard Behrends, WS 2009/10

Ausgabe: 14. 12. 2009

Abgabe: am 05. 01. 2010 bis 16.00 Uhr in den Fächern der Tutoren

Bei einigen Aufgaben gibt es eine *-Version. Die ist für die ambitionierteren Übungsteilnehmer gedacht. Das gilt auch für die **-Aufgaben, bei denen wird unter den richtigen Lösungen auch ein Preis verlost. Bitte für jedes n auf dem gleichen Zettel höchstens eine der Aufgaben n, n^*, n^{**} bearbeiten, $n = 1, 2, 3, 4$.

Allen Hörerinnen und Hörern eine schöne Weihnachtszeit!!

1. a) Berechnen Sie mit dem Satz von de Moivre-Laplace approximativ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 120 000 Würfen eines fairen Würfels die Anzahl der geworfenen Zweien zwischen 19 500 und 21 200 liegt.

b) Bestimmen Sie eine Zahl k, so dass mit Wahrscheinlichkeit 0.99 die Anzahl der geworfenen Zweien zwischen $20\,000 - k$ und $20\,000 + k$ liegt. (Wieder bei 120 000 Versuchen. Wieder soll der Satz von de Moivre-Laplace angewendet werden.)

2. X und Y seien unabhänigige $\mathbb{R}^+$-wertige Zufallsvariable, die wir als Wartezeit interpretieren. Zeigen Sie, dass das induzierte Maß von $X + Y$ eine Dichte hat und bestimmen Sie die Dichtefunktion in den folgenden beiden Fällen:

a) $X = 1$ (konstant), und Y ist exponentialverteilt zum Parameter $\lambda > 0$.

a*) X nimmt die Werte 1 und 2 mit Wahrscheinlichkeit p bzw. $1 - p$ an (wo $0 < p < 1$), und Y ist exponentialverteilt zum Parameter $\lambda > 0$.

b) X ist gleichverteilt in $[\,0, 1\,]$, und Y ist exponentialverteilt zum Parameter $\lambda = 1$.

b*) X ist gleichverteilt in $[\,a, b\,]$ (wobei $0 \leq a < b$), und Y ist exponentialverteilt zum Parameter $\lambda > 0$.

3. Beweisen Sie den Hilfssatz auf Seite 118 unter der schwächeren Voraussetzung, dass F auf jedem beschränkten Intervall beschränkt ist; auch soll angenommen werden, dass es ein $t > 0$ mit $F(t) \neq 0$ gibt.

Vorschlag für die Beweisstruktur:

a) F ist überall von Null verschieden.

b) F ist überall strikt positiv.

c) F ist bei 0 (von rechts) stetig.

d) F ist bei jedem $t \geq 0$ von rechts stetig.

e) Bestimme α so, dass $F(1) = e^\alpha$. Dann ist $F = F_\alpha$ auf $\mathbb{Q}^+$. (Wieder ist $F_\alpha(t) := e^{\alpha t}$.)

f) Kombiniere „d“ und „e“, um $F = F_\alpha$ zu zeigen.

4. a) Auf Ihrer Urlaubsreise in einem noch recht unterentwickelten Land haben Sie festgestellt, dass die Entfernung zur nächsten Tankstelle exponentialverteilt mit Erwartungswert 300 ist (in Kilometern). Sie haben noch für 80 Kilometer Benzin im Tank. Wie wahrscheinlich ist es, dass Sie rechtzeitig eine Tankstelle finden?

b) Die Lebenszeit für Fahrradreifen soll als exponentialverteilt mit Erwartungswert 1200 (in Kilometern) angesehen werden. Bei einer Radtour sind es bis zum Ziel noch 50 km. Wie wahrscheinlich ist es, das ohne Panne zu überstehen?

Übrigens:
1. Ein Fahrrad hat zwei Reifen!
2. Die Lebenserwartungen der Reifen soll unabhängig sein (also eher eine Panne wegen Altersschwäche als durch einen Scherbenhaufen verursacht).
3. Sie dürfen alle Ergebnisse aus dem Skript verwenden, insbesondere die zum Maximum und Minimum von unabhängigen exponentialverteilten Zufallsvariablen.

Homepage der Veranstaltung: `page.mi.fu-berlin.de/behrends/stochastik2009`

Für den mathematischen „Arbeitsspeicher“ ...

Auf die folgenden Fragen sollte man jederzeit eine richtige Antwort geben können. **Zur Not mit Hilfe eines vorbereiteten Zettels (der übrigens später bei der Klausur auch verwendet werden darf).**

Arbeitsspeicher-Archiv: Nächste Seite

Was versteht man unter der „diskreten Faltung“ zweier Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{N}_0$, und in welchem Zusammenhang ist sie wichtig? Was ist die Faltung zweier Funktionen auf $\mathbb{R}^+$, und was lernt man aus der Faltung zweier Wahrscheinlichkeitsdichten auf $\mathbb{R}^+$? Was versteht man unter der Binomialverteilung? Unter welchen Bedingungen kann man die hypergeometrische Verteilung dadurch approximieren? Und wann die Poissonverteilung? Was besagt der Satz von deMoivre-Laplace? **Neu:** Was wird mit der Stirlingformel approximiert? Was ist eine gedächtnislose Wartezeit? Wie kann man die gedächtnislosen Wartezeiten beschreiben?

... und hier noch Beispiele aus den „Arbeitsspeichern“ anderer Teilbereiche der Mathematik:
Ist $\mathcal{E}$ ein Mengensystem, d.h. eine Teilmenge der Potenzmenge einer Menge M, wie ist dann $\bigcup_{E\in\mathcal{E}} E$ definiert? Und wie $\bigcap_{E\in\mathcal{E}} E$? Was ist eine offene, was eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$? Was besagt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung? Was ist eine stetige Funktion? Was versteht man unter dem Zwischenwertsatz? Was ist $f^{-1}(A)$, wie ist die inverse Abbildung f^{-1} definiert (falls sie existiert)? Was heißt Konvergenz für Folgen und Reihen. Was ist eine absolut konvergente Reihe? Warum ist dieser Begriff für die Stochastik wichtig? Was ist eine Folge in einer Menge M? Unter welchen Bedingungen weiß man, dass der Grenzwert einer Folge von stetigen (bzw. differenzierbaren) Funktionen wieder stetig (bzw. differenzierbar) ist? **Neu:**

Stochastik am Computer: Anregungen

Viele Definitionen, Ergebnisse und Verfahren sind besser zu verstehen, wenn man zur Illustration Computer-Simulationen zur Verfügung hat. Es wird empfohlen, sich solche Simulationen selbst zu schreiben, viele Routinen findet man schon vorgefertigt in den meisten Programmpaketen.

Unterprogramme: Zufallszahlen erzeugen können (Laplace, Bernoulli, Poisson, geometrisch, Exponentialverteilung, Normalverteilung, ...); Häufigkeitsverteilungen skizzieren können (so genannte Histogramme). Monte-Carlo-Verfahren zur approximativen Integration. **Neu:**

Projekte: Test des Zufallszahlgenenrators (etwa einige Millionen gleichverteilte Zufallszahlen in $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ erzeugen und prüfen, ob alle Ergebnisse in etwa gleich oft vorkommen); einige Millionen Poissonverteilte Zufallszahlen erzeugen und ein Histogramm erstellen, ... Integrale ausrechnen mit Monte-Carlo-Verfahren und Güte-Test durch Vergleich mit dem exakten Ergebnis; Testläufe zum Übereinstimmungsparadoxon; p gleichverteilt in $[0, 1]$ wählen, dann für verschiedene k testen, wie groß die (experimentelle) bedingte Wahrscheinlichkeit für $k + 1$ Erfolge bei k Erfolgen ist. Testen Sie experimentell die Güte der Approximation beim Wallisprodukt und bei der Stirlingformel. **Neu:** Testen Sie experimentell den Satz von deMoivre-Laplace.

Arbeitsspeicher-Archiv

Was ist eine σ-Algebra? Wie ist die σ-Algebra der Borelmengen definiert? Was ist ein Wahrscheinlichkeitsraum? Wie kann man einen Wahrscheinlichkeitsraum einfach definieren, wenn Ω höchstens abzählbar ist? Was versteht man unter a) der Gleichverteilung auf $\{1, \ldots, n\}$, b) einem Laplaceraum, c) der Bernoulliverteilung, e) der Poissonverteilung, f) der geometrischen Verteilung? Wie kann man auf einem Intervall, versehen mit der σ-Algebra der Borelmengen, einen Wahrscheinlichkeitsraum mit Hilfe einer Dichtefunktion definieren? Was versteht man unter a) Gleichverteilung, b) Exponentialverteilung, c) Normalverteilung? Was wird mit dem Buffonschen Nadelexperiment approximativ berechnet? Was ist eine Zufallsvariable? Wie ist der durch eine Zufallsvariable induzierte Wahrscheinlichkeitsraum definiert? Wie ist der Erwartungswert einer Zufallsvariablen im Fall diskreter Räume und bei Räumen mit Dichte definiert? Was sind Varianz und Streuung? Wie viele Möglichkeiten gibt es, k Elemente aus einer n-elementigen Menge auszuwählen? In welchen Fällen verwendet man die hypergeometrische Verteilung? Was ist eine maximum-likelihood-Schätzung? Was ist das Übereinstimmungs-Paradoxon? Was versteht man unter „bedingter Wahrscheinlichkeit“? Wann heißen zwei Ereignisse unabhängig? Was bedeutet es, dass n Ereignisse unabhängig sind? Wann sind zwei (oder allgemeiner: n) Zufallsvariable unabhängig? Was weiß man über den Erwartungswert des Produkts zweier *unabhängiger* Zufallsvariablen, was über die Varianz der Summe? Was ist das „Wurzel-n-Gesetz“?